

Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Pablo José Gerlach Mena
gerlach@us.es

Las mates de Gerlachito

<https://www.youtube.com/channel/UCIxtuOawscfjTAuKRlat6SA>

Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Vamos a definir la función valor absoluto $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$:

$$F(x) = |x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$|5| = 5$$

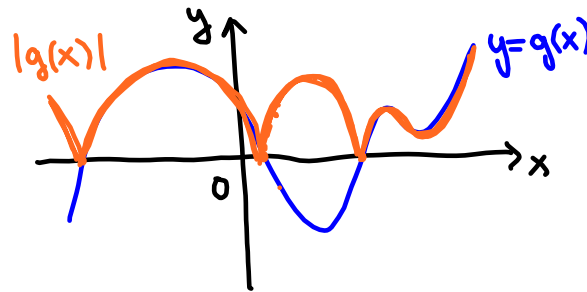
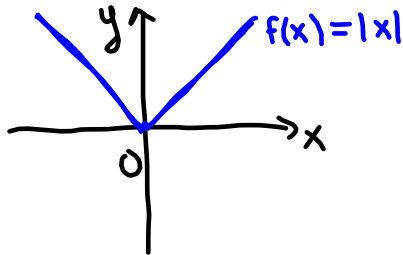
$$|-7| = 7$$

$$|0| = 0$$

Podemos cambiar el argumento y considerar de forma general:

$$|g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{si } g(x) \geq 0 \\ -g(x) & \text{si } g(x) < 0 \end{cases}$$

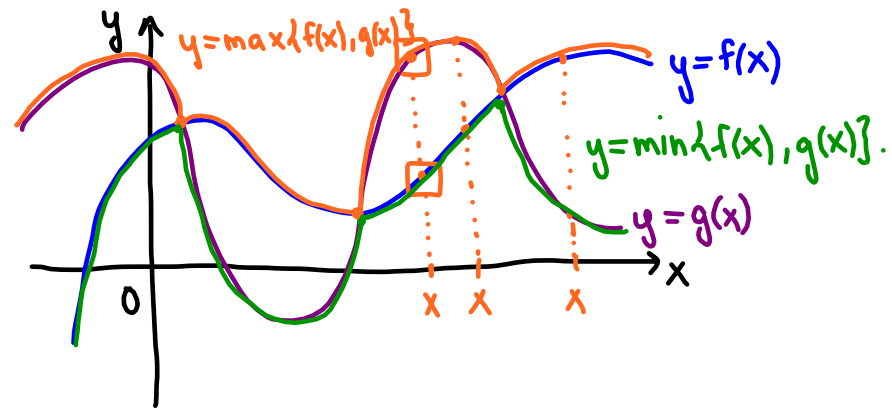
Geométicamente:



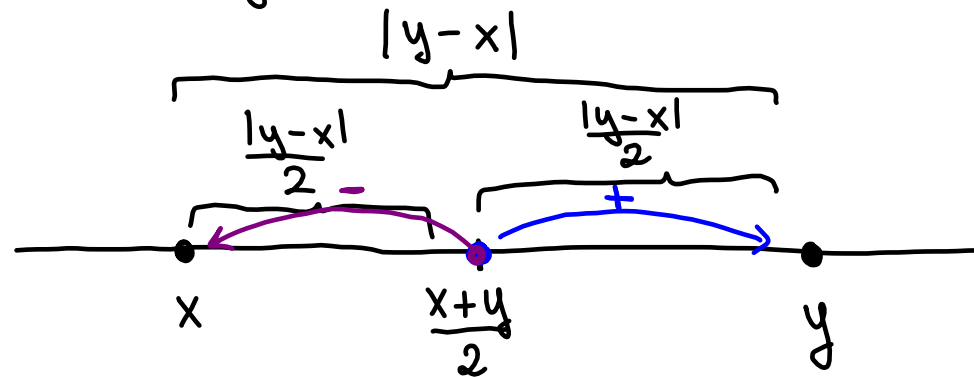
Sabemos calcular máximos y mínimos de números, pero ¿cómo podemos hacerlo para funciones? Es decir, si tenemos $f(x), g(x)$ son dos funciones, queremos hallar:

$$\max\{f(x), g(x)\} = ?$$

$$\min\{f(x), g(x)\} = ?$$



Para dar una fórmula del máximo y mínimo vamos a pensar en el caso sencillo de números: $x, y \in \mathbb{R}$:



$$\begin{aligned} \max\{x, y\} &= y \quad (\text{porque hemos elegido } y > x) \\ \min\{x, y\} &= x \end{aligned}$$

$$\max\{x, y\} = \frac{x+y}{2} + \frac{|y-x|}{2}$$

$$\min\{x, y\} = \frac{x+y}{2} - \frac{|y-x|}{2}$$

De este modo podemos calcular también:

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$$

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$$

Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ tales que:

- f es creciente, es decir, $f(n) \geq f(m)$ si $n > m$,
- $f(nm) = f(n) + f(m)$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Observamos que $f(n) \equiv 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ es una solución (función) que verifica las condiciones del ejercicio.

Vamos a ver que cualquier función F que verifique las condiciones del ejercicio también debe verificar las siguientes:

(1) f no es constante ni acotada.

(2) f no es estrictamente creciente (i.e. $f(n) \nlessdot f(m)$ si $n > m$).

Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ tales que:

- f es creciente, es decir, $f(n) \geq f(m)$ si $n > m$,
- $f(nm) = f(n) + f(m)$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

De ahora en adelante vamos a considerar que $f(n) \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$, es decir, $\exists a \in \mathbb{N}$ tal que $f(a) \neq 0$.

Entonces:

$$f(a^n) = f(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}) = \underbrace{f(a) + f(a) + f(a) + \cdots + f(a)}_{n \text{ veces}} = \underbrace{n}_{\substack{\in \\ \neq \\ \mathbb{N}}} \cdot \underbrace{f(a)}_{\substack{\neq \\ \neq \\ 0}} \Rightarrow \begin{cases} f \text{ no puede ser} \\ \text{constante.} \\ f \text{ no está} \\ \text{acotada.} \end{cases} \quad \square$$

Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ tales que:

- f es creciente, es decir, $f(n) \geq f(m)$ si $n > m$,
- $f(nm) = f(n) + f(m)$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Observemos que:

$$\underbrace{f(1 \cdot 1)}_{f(1)} = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$$

Tomamos ahora $2, 3 \in \mathbb{N}$. Tenemos las siguientes opciones:

(1) Si $f(2) = f(3)$: Ya hemos terminado porque $3 > 2$ pero $f(3) \nmid f(2)$. $\square$

(2) Si $f(2) \neq f(3)$: Llamamos $a := f(2)$, $b := f(3)$. ($b > a$). Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} f(2^b) = b \cdot f(2) = b \cdot a = a \cdot b \\ f(3^a) = a \cdot f(3) = a \cdot b \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Tenemos que } 2^b \neq 3^a \\ \text{pero } f(2^b) = f(3^a). \end{array} \quad \square$$

Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ tales que:

- f es creciente, es decir, $f(n) \geq f(m)$ si $n > m$,
- $f(nm) = f(n) + f(m)$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Hasta ahora hemos visto que si f es una función con $f(n) \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ solución:

- f no acotada
- f no constante
- f no estrictamente creciente.

De este último hecho deducimos que $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$f(m) = f(m+1) =: k < f(m+2)$$

Entonces estudiamos:

$$f((m+1)^2) = 2f(m+1) = 2k$$

$$f(m(m+2)) = f(m) + f(m+2) = k + f(m+2) > k + k = 2k \quad \left. \vphantom{f(m(m+2)) = f(m) + f(m+2) = k + f(m+2) > k + k = 2k} \right\} \Rightarrow f((m+1)^2) < f(m(m+2))$$

Sin embargo:

$$\left. \begin{array}{l} (m+1)^2 = m^2 + 2m + 1 \\ m(m+2) = m^2 + 2m \end{array} \right\} \Rightarrow (m+1)^2 > m(m+2)$$



La única solución es $f(n) \equiv 0 \forall n \in \mathbb{N}$

Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ tales que:

⊙ f es creciente, es decir, $f(n) \geq f(m)$ si $n > m$,

- $f(2) = 2$,

⊙ $f(nm) = f(n) + f(m)$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Con estas condiciones la única solución era $f(n) \equiv 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Como $f(2) = 2 \neq 0$, entonces no hay ninguna solución de este problema.

Podemos ver de forma sencilla que:

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = 2$$

$$¿f(3) = ?$$

$$f(4) = f(2^2) = 2f(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$f(a^n) = n f(a)$$

Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ tales que:

- f es creciente, es decir, $f(n) \geq f(m)$ si $n > m$,
- $f(2) = 2$,
- $f(nm) = f(n) + f(m)$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Como $f(2) = 2$ y $f(4) = 4$, tenemos que:

$$f(3) \in \{2, 3, 4\}$$

Vamos a analizar cada caso por separado:

(1) Si $f(3) = 2$: Entonces $\underbrace{2^3}_8 < \underbrace{3^2}_9$ pero $f(2^3) = 3f(2) = 6 \neq 4 = 2f(3) = f(3^2) !!!$

(2) Si $f(3) = 3$: Entonces $2^{11} < 3^7$ pero $f(2^{11}) = 11f(2) = 22 \neq 21 = 7f(3) = f(3^7) !!!$

(3) Si $f(3) = 4$: Entonces $\underbrace{3^3}_{27} < \underbrace{2^5}_{32}$ pero $f(3^3) = 3f(3) = 12 \neq 10 = 5f(2) = f(2^5) !!!$

Entonces no hay solución del problema.

Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Hallar todas las funciones reales continuas $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ que cumplen:

$$x + \frac{1}{x} = f(x) + \frac{1}{f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Veamos qué ocurre cuando reescribimos la ecuación original:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= f(x) + \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow x - f(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \boxed{x - f(x)} = \frac{\boxed{x - f(x)}}{x \cdot f(x)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \boxed{x - f(x)} \cdot 1 - \boxed{x - f(x)} \cdot \frac{1}{x f(x)} &= 0 \Leftrightarrow (x - f(x)) \cdot \left(1 - \frac{1}{x f(x)}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - f(x) = 0 \\ 1 - \frac{1}{x f(x)} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Obtenemos:

$$f(x) = x$$

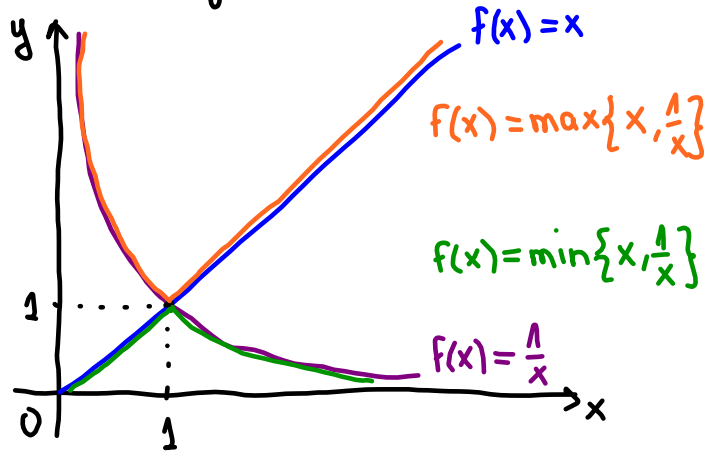
$$\frac{1}{x f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Hallar todas las funciones reales continuas $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ que cumplen:

$$x + \frac{1}{x} = f(x) + \frac{1}{f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Podemos dibujarlas:



De momento hemos obtenido dos soluciones de la ecuación:

$$f(x) = x$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Resulta que las funciones $\max\{x, \frac{1}{x}\}$ y $\min\{x, \frac{1}{x}\}$ también verifican la ecuación del enunciado:

$$f(x) = \max\{x, 1/x\} = \frac{x + \frac{1}{x}}{2} + \frac{|x - \frac{1}{x}|}{2}$$

$$f(x) = \min\{x, 1/x\} = \frac{x + \frac{1}{x}}{2} - \frac{|x - \frac{1}{x}|}{2}$$

Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Encontrar todas las funciones reales f , de variable real, que satisfacen la ecuación funcional

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x + f(x + y)) = f(2x) + y$$

cualesquiera sean x, y reales.

Comenzamos evaluando en $x = f(0), y = -f(0)$:

$$\underbrace{f(f(0) + \underbrace{f(f(0) - f(0))}_0))}_{f(2f(0))} = f(\cancel{2f(0)}) - f(0) \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

A continuación hacemos $x = 0$ en la ecuación original:

$$f(0 + \underbrace{f(0 + y)}_{f(y)}) = f(\underbrace{2 \cdot 0}_{f(0)=0}) + y \Rightarrow \boxed{f(f(y)) = y. \quad \forall y \in \mathbb{R}}$$

Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Encontrar todas las funciones reales f , de variable real, que satisfacen la ecuación funcional

$$f(x + f(x + y)) = f(2x) + y$$

cualesquiera sean x, y reales.

Si hacemos $y=0$ en la ecuación original:

$$f(x + f(x + 0)) = f(2x) + 0 \Leftrightarrow f(x + f(x)) = f(2x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Si volvemos a aplicar f a ambos lados de la igualdad anterior:

$$f(f(x + f(x))) = f(f(2x)) \Rightarrow x + f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Comprobamos que $f(x) = x$ verifica la ecuación original:

$$f(x + f(x + y)) = f(x + x + y) = x + x + y = 2x + y$$

$$f(2x) + y = 2x + y$$

De momento sabemos que:

$$f(0) = 0$$

$$f(f(y)) = y \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo valor $x \in \mathbb{R}$.

Queremos ver si hay más polinomios que cumplan la ecuación. Comenzamos viendo si con $k=1$ hay algún polinomio $P \neq 0$ tal que:

$$\underbrace{P(x^1)}_{P(x)} - \underbrace{P(1 \cdot x)}_{P(x)} = x^1 \cdot P(x) \Rightarrow P(x) \neq 0 !!!$$

0

Claramente si $P(x) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
se verifica la ecuación funcional.

Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo valor $x \in \mathbb{R}$.

Hacemos ahora $k \geq 2$. y supongamos que $P(x) \equiv C$ constante. Entonces:

$$\underbrace{C - C}_0 = x^k \cdot C \Rightarrow C = 0 !!!$$

Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo valor $x \in \mathbb{R}$.

Veamos si para $k \geq 2$ podemos encontrar polinomios P no constantes. Entonces:

$$\boxed{P(x^k) - P(kx)} = \boxed{x^k \cdot P(x)} \rightarrow \underbrace{a_0 x^k + a_1 x^{k+1} + a_2 x^{k+2} + \dots + a_n x^{k+n}}_{\text{Grado } n+k}$$

$\downarrow$
 $a_0 + a_1 x^k + a_2 x^{2k} + \dots + a_n x^{nk}$
Grado $n \cdot k$

$\downarrow$
 $a_0 + a_1 kx + a_2 k^2 x^2 + \dots + a_n k^n x^n$
Grado n

Como $k \geq 2 > 1$, entonces $nk > n$, por lo que $P(x^k) - P(kx)$ tiene grado $n \cdot k$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

$n := \text{grado del polinomio } P(x).$

Debe ser:

$$n \cdot k = k + n ; nk - k = n ;$$

$$k(n-1) = n ; k = \frac{n}{n-1} ;$$

$$k = 1 + \frac{1}{n-1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} n=2 \\ k=2 \end{matrix}}$$

Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan

Ahora sabemos que debe ser:

$$k=2, n=2:$$

para todo valor $x \in \mathbb{R}$.

$$\underbrace{P(x^k) - P(kx)}_{P(x^2) - P(2x)} = x^k P(x) \quad \text{con} \quad P(x) = ax^2 + bx + c.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que:

$$\cancel{ax^4} + \cancel{bx^2} + \cancel{c} - \cancel{4ax^2} - \cancel{2bx} - \cancel{c} = \cancel{ax^4} + bx^3 + cx^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b-4a)x^2 - 2bx = bx^3 + cx^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} x^3: 0 = b \\ x^2: b - 4a = c \\ x^1: -2b = 0 \\ x^0: 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow b = 0, c = -4a \Rightarrow P(x) = \boxed{a}x^2 + 0 \cdot x - 4\boxed{a} = a(x^2 - 4) \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo valor $x \in \mathbb{R}$.

Hemos obtenido que las soluciones son:

- Si $k > 1$: $P(x) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- Si $k=2$: $P(x) = a(x^2 - 4)$, $a \neq 0$ (soluciones aparte de $P(x) \equiv 0$).